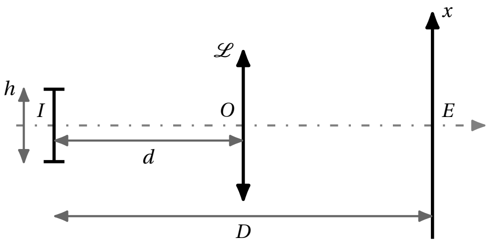
Exercice 1 : Rétroprojecteur

On souhaite former, sur un écran mural noté E, l'image agrandie d'un transparent à l'aide d'une lentille mince convergente $\mathscr{L}$. On désigne par I l'intersection du transparent avec l'axe optique, par O et f' le centre optique et la distance focale image de la lentille. On désigne par d la distance IO.

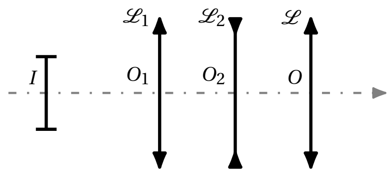


1. (a) Déterminer le signe de γ.

   (b) On souhaite que la taille de l'image sur l'écran soit $|\gamma|h$, avec $|\gamma| > 1$. Déterminer l'expression de la distance d puis de la distance focale f' en fonction de D et γ. Calculer d, et f' pour $h = 24\,\mathrm{mm}$, $H = |\gamma|h = 1{,}2\,\mathrm{m}$ et $D = D_0 = 3{,}0\,\mathrm{m}$. On note d_0 la valeur de d et et O_0 la position correspondante.

   (c) On peut régler l'objectif en translatant O par rapport à I. Déterminer les distances D_{min} et D_{max} quand on déplace O de $1\,\mathrm{mm}$ de part et d'autre de la position O_0 et commenter.

2. Pour cette question, D est de nouveau fixé à $D = D_0$ et la lentille en O_0. On souhaite multiplier la taille de l'image sur l'écran par 2 sans déplacer ni celui-ci ni le transparent, ni la lentille. On envisage d'intercaler, entre le transparent et la lentille $\mathscr{L}$, une lentille mince convergente $\mathscr{L}_1$ de distance focale image f_1' et une lentille mince divergente $\mathscr{L}_2$ de distance focale image f_2', avec $|f_2'| = 2f_1'$.

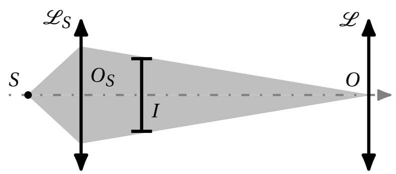


   (a) Justifier qu'on n'aurait pas pu réaliser cette dilatation par 2 en n'ajoutant qu'une seule lentille.

   (b) On place la lentille $\mathscr{L}_1$ de telle sorte que son foyer objet coïncide avec I. Où doit-on placer $\mathscr{L}_2$? On justifiera le fonctionnement de ce dispositif en s'aidant d'une construction.

3. On supprime dans cette partie les lentilles $\mathscr{L}_1$ et $\mathscr{L}_2$ pour étudier maintenant la source lumineuse éclairant le transparent. On la considère ponctuelle, située en S à une distance d_S en amont du transparent. La distance D est à nouveau fixée à D_0.

   On intercale, en O_S une lentille mince convergente $\mathscr{L}_S$ (de distance focale f_S') entre S et le transparent de telle sorte que le faisceau lumineux issu de S englobe tout le transparent et se focalise en O_0, centre optique de la lentille $\mathscr{L}$.



   (a) Le schéma ci-dessus représente l'enveloppe « utile » du faisceau lumineux issu de S atteignant la lentille $\mathscr{L}$. Compléter ce schéma pour représenter cette enveloppe entre la lentille $\mathscr{L}$ et l'écran E.

   (b) Déterminer l'expression de la distance SO_S en fonction de f_S', d_S et d_0. Calculer SO_S pour $f_S' = 1{,}8\,\mathrm{cm}$ et $d_S = 5\,\mathrm{cm}$.

   (c) Quelle est l'utilité de la lentille $\mathscr{L}_S$?

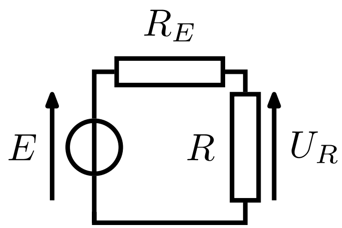
Problème 1 : Transferts de puissance

On étudie le transfert de puissance électrique entre un générateur et différents dipôles.

Dans tout le problème on veillera à utiliser efficacement des schémas de circuits électriques et de caractéristiques statiques pour justifier les réponses apportées.

I Alimentation d'un dipôle résistif

On utilise un générateur de tension linéaire de force électromotrice E et de résistance interne R_E pour alimenter un résistor de résistance R comme représenté sur la figure ci-contre.



I.1. Déterminer la tension U_R aux bornes du résistor R et en déduire la puissance $\mathscr{P}_R$ reçue par le résistor R et la puissance $\mathscr{P}_E$ fournie par le générateur idéal de tension.

I.2. Dans cette question E et R_E sont fixées mais R peut varier.

(a) Pour quelle valeur de R le rapport $\eta = \mathscr{P}_R/\mathscr{P}_E$ est-il maximal ? Quelle est alors la valeur de la puissance $\mathscr{P}_R$ correspondante ?

(b) Pour quelle valeur de R la puissance $\mathscr{P}_R$ est-elle maximale ? Quelle est alors l'expression de ce maximum et la valeur de η correspondante ?

I.3. Dans cette question E, R_E et R sont désormais fixées, avec $R \neq R_E$. On souhaite que la tension aux bornes de R soit $E/2$. On envisage de rajouter une résistance quelconque R_X dans le circuit.

(a) La résistance R_X est branchée en série avec les trois dipôles précédents. Déterminer l'expression de la tension U_R aux bornes de R.

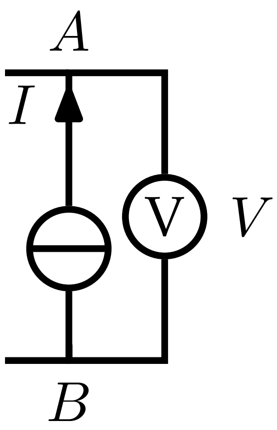
(b) Même question si R_X est branchée en parallèle aux bornes de R.

(c) Même question si R_X est branchée en parallèle aux bornes de R_E.

(d) On a $R = 4R_E$. Quelle valeur choisir pour R_X et où la brancher pour avoir $U_R = E/2$? Calculer dans ce cas la puissance reçue par R.

(e) Mêmes questions pour $R = R_E/4$. Commenter.

I.4. On modélise un ohmmètre comme un dipôle formé de l'association parallèle d'un générateur idéal de courant d'intensité I et d'un voltmètre idéal comme représenté ci-contre.
Dans cette question, le résistor R est débranché de l'association série du générateur E et du résistor R_E.



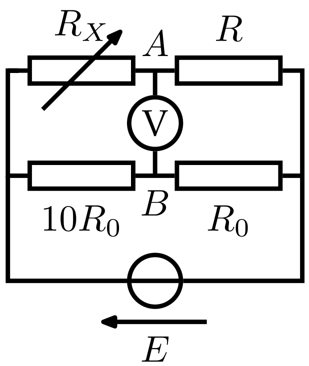
(**a**) Quelle tension mesure le voltmètre quand on branche le résistor R aux bornes A et B de l'ohmmètre, si $R = 10\,\Omega$ et $I = 10\,\text{mA}$.

(**b**) On branche désormais l'ohmmetre aux bornes de l'association série du générateur E et du résistor R_E. Quelle tension mesure le voltmètre si $R_E = 10\,\Omega$, $I = 10\,\text{mA}$ et $E = 2{,}0\,\text{V}$. Quelle sera alors l'erreur sur la valeur de la résistance affichée par l'ohmmetre ?

(**c**) Proposer une méthode de mesure de la résistance R_E sans ohmmètre, en utilisant par exemple un voltmètre et une résistance variable R_X. On produira impérativement un schéma du montage réalisé.

II Linéarité de résistance au point de Wheatstone

Pour vérifier que la résistance R ne varie pas en fonction de la tension qui lui est appliquée, on effectue sa mesure en utilisant le pont de Wheatstone représenté sur la figure ci-contre. Les résistances R_0 et $10R_0$ sont fixes, avec $R_0 = 1{,}00\,\text{k}\Omega$, la résistance R_X est variable et on cherche à déterminer la valeur de R. Le générateur de tension et le voltmètre sont idéaux.



II.1. Dans cette première question, on a $E \equiv E_0 = 10\,\text{V}$.

(**a**) Établir l'expression de la tension U_{AB} en fonction de E_0, de R_0, R_X et R.

(**b**) On observe que U_{AB} est nulle (à la précision du voltmètre) pour $R_X = 102(1)\,\Omega$. En déduire la valeur de R.

II.2. Sans changer aucun des résistors, on augmente la valeur de E jusqu'à $10E_0$. On mesure alors $U_{AB} = E_0/10$.

(**a**) On suppose que les résistances R_X, R_0 et $10R_0$ n'ont pas changé. En déduire la valeur de R dans ces conditions.

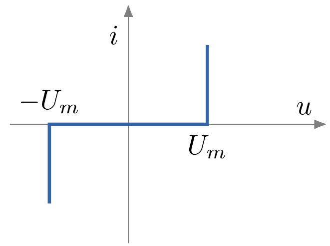
(**b**) On fait l'hypothèse que la caractéristique statique du résistor noté R se met sous la forme :

$$I = \alpha U + \beta U^3. \tag{1}$$

Déterminer les valeurs de α et β.

III Alimentation d'un moteur de trottinette électrique

On modélise le moteur d'une trottinette électrique[i] comme un dipôle passif symétrique dont la caractéristique, en convention récepteur, est donnée ci-contre (on le représentera avec le symbole M) dans les schémas.
Ce moteur est alimenté en branchant à ses bornes l'association série d'un générateur idéal de force électromotrice E et d'un résistor de résistance R_E comme à la Section I.



III.1. On observe que le courant dans le moteur devient non nul quand la force électromotrice E atteint la valeur de $E_{\text{min}} = 10\,\text{V}$. En déduire la valeur de U_m puis, en admettant que U_m reste constant, l'expression de l'intensité du courant traversant le moteur quand E est supérieure à E_{min}.

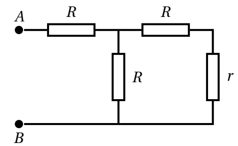
III.2. (**a**) En déduire la valeur de E, notée E_1 pour que le moteur reçoive une puissance de $\mathscr{P}_M = 200\,\text{W}$ si $R_E = 1\,\Omega$.

(**b**) **Question subsidiaire, à rédiger très succinctement, ne pas y passer plus d'une minute…** Justifier l'ordre de grandeur de cette valeur de puissance pour une ascension de la rue Saint Jacques.

III.3. Pour réchauffer ses mains durant l'hiver, le trottineur installe un radiateur d'appoint sur le guidon, qu'on peut modéliser comme un résistor R_r placé en parallèle du moteur sur le circuit précédent. Quelle doit être la valeur de R_r pour qu'il dissipe une puissance Joule de $\mathscr{P}_c = 50\,\text{W}$ si on conserve $E = E_1$? Quelle sera alors la puissance consommée par le moteur. Calculer la somme de ces deux puissances et commenter.

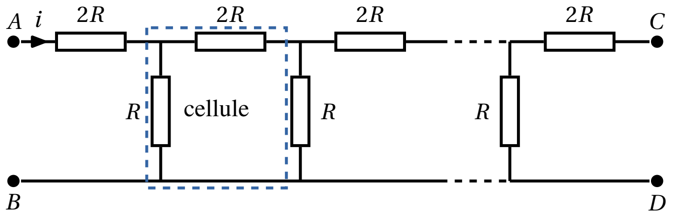
Exercice 2 : Chaînes de résistances

1. Déterminer la valeur de la résistance r dans la chaîne ci-contre pour que la résistance d'entrée entre les bornes A et B soit elle-aussi égale à r.



2. On considère la chaîne de résistors de la figure ci-dessous dans laquelle la «cellule» peut être répétée un grand nombre de fois.

[i] Cette modélisation est pertinente pour les moteurs dits «sans balais» qui équipent ces trottinettes si l'on ne s'intéresse qu'à l'extérieur du moteur, en régime de fonctionnement.



(**a**) On considère le cas à 0 cellules et on branche un résistor de résistance notée R_f entre les nœuds C et D. Calculer la résistance équivalente vue des nœuds A et B, notée R_e pour :

- $R_f = R$
- $R_f = (\sqrt{3} - 1)R$

(**b**) Mêmes questions pour un système à 1 cellule.

(**c**) On traite le cas à 2 cellules en utilisant la bibliothèque de résolution symbolique `sympi` de python. On cherchera la valeur de la résistance équivalente en déterminant l'intensité du courant i quand on branche un générateur de tension de force électromotrice E entre les nœuds A et B et en écrivant le système différentiel d'équations linéaires vérifié par les différents courants et tensions dans le circuit.

Un exemple d'utilisation de cette bibliothèque est donné à cette adresse : , activité `b5e1-95150` sur capytale

(**d**) Établir, analytiquement cette fois, la valeur particulière de R_f, notée R_∞ pour laquelle la résistance R_e vue de A et B est indépendante du nombre de cellules.

Correction de l'exercice 1

1. (**a**) L'objet et l'image doivent être réels, soit $\overline{OA'} > 0$ et $\overline{OA} < 0$. La formule du grandissement de Newton assure que le grandissement sera négatif.

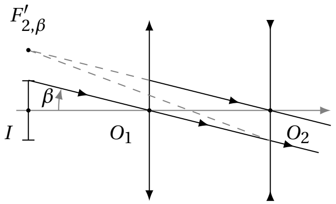
(**b**) Utilisons $\alpha = H/h$ et travaillons avec les distances (positives) OE et $OI = d$. La formule du grandissement de Descartes assure que $\alpha = OE/OI = OE/d$. Comme par ailleurs $D = OE + d$, on peut écrire $\alpha = \frac{D-d}{d}$, soit $d = \frac{D}{\alpha+1}$. La relation de conjugaison de Descartes donne $\frac{1}{OE} + \frac{1}{d} = \frac{1}{f'}$, soit $\frac{d}{D-d} + 1 = \frac{d}{f'}$ soit, après substitution de l'expression de d obtenue et manipulations $f' = \frac{D\alpha}{(\alpha+1)^2}$. On calcule $d_0 = 5{,}88\,\mathrm{cm}$ et $f' = 5{,}77\,\mathrm{cm}$: le transparent n'est qu'à 1 mm du foyer objet de la lentille, ce qui n'est pas surprenant puisqu'on veut un grandissement de $\alpha = 50$.

(**c**) On exprime cette fois-ci la distance D en fonction de d et f'. La relation de conjugaison $\frac{1}{D-d} + \frac{1}{d} = \frac{1}{f'}$ donne $D = \frac{d^2}{d-f'}$. On calcule $D = 1{,}3\,\mathrm{m}$ pour $d = d_{\mathrm{min}} = 5{,}98\,\mathrm{cm}$ et $D = 33{,}4\,\mathrm{m}$ pour $d = d_{\mathrm{min}} = 5{,}78\,\mathrm{cm}$. On constate qu'on pourra réaliser la mise au point sur des distances D très différentes en modifiant très légèrement la configuration.

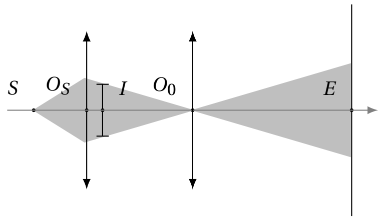
2. (**a**) Le plan de l'écran est conjugué par $\mathscr{L}$ de celui du transparent. Si on forme une image du transparent par une autre lentille, celle-ci ne sera plus en I et la lentille $\mathscr{L}$ ne pourra pas en former une image sur l'écran.

(**b**) La lentille $\mathscr{L}_1$ envoie à l'infini l'image de I dont l'image par $\mathscr{L}_2$ sera au foyer image de cette dernière, qui doit donc coïncider avec I pour que son image par $\mathscr{L}$ soit sur l'écran. On doit donc avoir $I = F_1 = F'2$. Comme $\left|f_2'\right| = 2f_1'$, la lentille $\mathscr{L}_2$ doit être placée à $|f_2'| = 2f_1'$ en aval de I. Notons que cette distance doit être inférieure à d pour qu'on puisse insérer les deux lentilles $\mathscr{L}_1$ et $\mathscr{L}_2$ en amont de la lentille de projection.

Il faut également vérifier que cette configuration réalise bien le grandissement attendu. L'image à l'infini formée par $\mathscr{L}_1$ est vue sous l'angle $\beta \simeq \tan\beta = h/f_1'$, son image par $\mathscr{L}_2$ sera le foyer image secondaire associé à cette incidence, sa taille sera donc $\tan\beta \times |f_2'| = h\frac{|f_2'|}{f_2'} = 2h$.



3. (**a**) et **b**. L'enveloppe est représentée ci-contre. La source O et le centre O de la lentille de projection doivent être conjugués par la lentille $\mathscr{L}_S$. On a donc, en notant x la distance SO_0 :



$$\frac{1}{x} + \frac{1}{d_0 + d_S - x} = \frac{1}{f_S'}$$
$$f_s'\left(d_0 + d_S\right) = x\left(d_0 + d_S - x\right)$$
$$x^2 - \left(d_0 + d_S\right)x + \left(d_0 + d_S\right)f_S' = 0.$$

On en déduit

$$x = \frac{d_0 + d_S - \sqrt{\left(d_0 + d_S\right)\left(d_0 + d_S - 4f_S'\right)}}{2} = 2{,}28\,\mathrm{cm},$$

puisque l'autre solution correspondrait à mettre $\mathscr{L}_S$ en aval de I.

(**c**) Cette lentille permet de récupérer une grande partie de la lumière de S en lui permettant de passer le diaphgrame que constitue la lentille $\mathscr{L}$ pour l'envoyer sur E.

Correction du problème 1

I Alimentation d'un dipôle résistif

I.1. Un pont diviseur de tension donne :

$$U_R = \frac{RE}{R + R_E} \to \mathscr{P}_R = \frac{U_R^2}{R} = \frac{E^2 R}{(R + R_E)^2} \tag{2}$$

Pour la puissance fournie par le générateur, on calcule le courant I qu'il fournit, en convention générateur :

$$I = \frac{E}{R + R_E} \to \mathscr{P}_E = EI = \frac{E^2}{R + R_E}. \tag{3}$$

I.2. (**a**) On calcule :

$$\eta = \frac{\mathscr{P}_R}{\mathscr{P}_E} = \frac{R}{R + R_E} = 1 - \frac{R_E}{R + R_E}, \tag{4}$$

maximal en 1 pour $R \gg R_E$. On a alors $\mathscr{P}_R = E^2/R$ qui est d'autant plus faible que R est élevé.

(**b**) Une rapide étude de fonction assure que $\mathscr{P}_R$ est maximale pour $R = R_E$ pour laquelle :

$$\mathscr{P}_{R,\mathrm{max}} = \frac{E^2}{4R_E} = 2\mathscr{P}_E \to \eta = \frac{1}{2}. \tag{5}$$

I.3. (**a**) On a $U_R = ER/(R + R_E + R_X)$.

(**b**) L'association parallèle de R et R_X a une résistance de $RR_X/(R + R_X)$. On a donc :

$$U_R = \frac{ERR_X/(R + R_X)}{R_E + RR_X/(R + R_X)}. \tag{6}$$

(**c**) De même :

$$U_R = \frac{ER}{R + R_E R_X/(R_E + R_X)}. \tag{7}$$

(**d**) On aura $U_R = E/2$ si on réalise un pont diviseur de tension entre deux résistances égales. En l'absence de R_X on a $R > R_E$ on doit donc «diminuer» cette résistance en lui ajoutant la résistance R_X en parallèle telle que : $RR_X/(R + R_X) = R_E$, soit :

$$\frac{4R_E R_X}{4R_E + R_X} = R_E \to R_X = \frac{4R_E}{3}. \tag{8}$$

La puissance reçue par R est alors :

$$\mathscr{P}_R = \frac{U_R^2}{R} = \frac{E^2}{4R} = \frac{E^2}{16R_E}. \tag{9}$$

Notons qu'on peut également rajouter une résistance égale à $3R_E$ en série avec R_E et R. La puissance reçue par R ne sera pas changée mais la celle fournie par le générateur sera inférieure car la résistance de l'ensemble sera supérieure au cas où on a rajouté R_X en parallèle à R.

(e) On doit maintenant «diminuer» la résistance R_E en lui ajoutant une résistance R_X en parallèle telle que $R_E R_X/(R_E+R_X) = R$ soit :

$$\frac{R_E R_X}{R_E+R_X} = R = \frac{R_E}{4} \to R_X = \frac{R_E}{3}. \tag{10}$$

La puissance reçue par R est alors :

$$\mathscr{P}_R = \frac{U_R^2}{R} = \frac{E^2}{4R} = \frac{E^2}{R_E}. \tag{11}$$

Notons que comme R_E représente la résistance interne d'un générateur, il est peu probable qu'il s'agisse d'un résistor physique aux bornes desquelles on puisse brancher R_X.

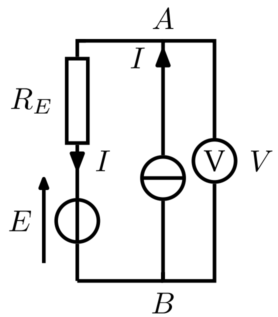
I.4. Le voltmètre étant idéal, aucun courant ne le traverse.

(a) Le résistor est parcouru par le courant I, la tension à ses bornes est donc $RI = 1{,}0\cdot 10^{-1}\,\mathrm{V}$.

(b) Le générateur de courant envoie toujours le même courant I dans le résistor R_E mais le voltmètre mesure désormais la tension $E+R_E I$ (si les polarités de l'ohmmètre et du générateur sont les mêmes comme sur la figure ci-contre). On lit donc :

$$U = E + R_E I = 2{,}1\,\mathrm{V}.$$

L'erreur est donc de 2000%. Signalons que si l'ohmmètre est branché en sens inverse, on mesure $E - R_E I = 1{,}9\,\mathrm{V}$, soit une erreur de de 1800%.



(c) Comme vu en TP, il est préférable d'utiliser une résistance variable R_X branchée en parallèle de l'association série de E et R_E. Quand la tension à ses bornes est $E/2$, un pont diviseur de tension assure que $R_X = R_E$.

II Linéarité de résistance au pont de Wheatstone

II.1. **(a)** Des ponts diviseurs de tension assurent que la tension aux bornes de R (resp. R_0) est $RE/(R+R_X)$ (resp. $ER_0/11R_0$). On a donc :

$$\frac{U_{AB}}{E} = \frac{R}{R+R_X} - \frac{1}{11}. \tag{12}$$

(b) On a, quand $U_{AB} = 0$:

$$\frac{R}{R+R_X} = \frac{1}{11} \to R = \frac{R_X}{10} = 10{,}2(1)\,\Omega. \tag{13}$$

(a)

(b) L'équation (12) donne maintenant :

$$\frac{R}{R+R_X} - \frac{1}{11} = \frac{E_0/10}{10E_0} = \frac{1}{100} \to \frac{R}{R_X} = 1{,}12\cdot 10^{-2} \to R = 11{,}4(1)\,\Omega. \tag{14}$$

(c) La variation de la résistance avec la tension étant faible, on peut supposer que le terme en βU^3 n'est qu'une faible correction devant celui en αU. On a donc en $I \simeq \alpha U$ soit $\alpha = 1/R$ avec $R \simeq 10{,}2\,\Omega$. On détermine β à l'aide de la valeur de la résistance pour $E = 10E_0$. On a en effet alors :

$$I = \frac{10E_0}{R(10E_0)} = \frac{10E_0}{R_0} + \beta(10E_0)^3 \to \beta = \frac{R_0 - R}{100RR_0E_0^2} = -1{,}0\cdot 10^{-6}\,\Omega^{-1}\cdot\mathrm{V}^{-2}. \tag{15}$$

On a donc :

$$I = 9{,}8\cdot 10^{-2}U - 1\cdot 10^{-6}U^3 \to \frac{1}{R} = 0{,}1 - 1{,}0\cdot 10^{-6}U^2. \tag{16}$$

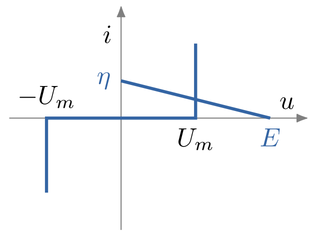
Sans l'approximation précédente sur la valeur de α, la résolution du système linéaire de deux équations à deux inconnues α et β donne, numériquement :

$$\alpha = 9{,}81\cdot 10^{-2} \quad \beta = -1{,}04\cdot 10^{-6}. \tag{17}$$

III Alimentation d'un moteur de trottinette électrique

III.1. Le générateur linéaire est caractérisé par une force électromotrice E et un courant électromoteur $\eta = E/R_E$.

Quand il est branché sur le moteur, le point de fonctionnement est l'intersection de la caractéristique en convention générateur du générateur et de la caractéristique en convention récepteur du moteur. On obtient la figure ci-contre.
Le courant sera donc non nul quand $E \geqslant U_m$ soit $U_m = 10\,\mathrm{V}$.



On détermine géométriquement que le courant le parcourant vérifie :

$$\frac{I}{\eta} = \frac{E-U_m}{E} \to \frac{R_E I}{E} = \frac{E-U_m}{E} \to I = \frac{E-U_m}{R_E}. \tag{18}$$

III.2. **(a)** La puissance reçue par le moteur est $\mathscr{P}_M = U_m I$. On aura donc :

$$200\,\mathrm{W} = \mathscr{P}_M = U_m I = \frac{U_m(E-U_m)}{R_E} \to E = 30\,\mathrm{V}. \tag{19}$$

(b) On effectue un bilan mécanique. Pour une ascension à la vitesse $v \simeq 2\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$ d'une masse de $m = 90\,\mathrm{kg}$ sur une pente de 65% soit $\alpha = 33°$, on calcule :

$$\mathscr{P}_M = mg\sin(\alpha)v = 2{,}7\cdot 10^2\,\mathrm{W}. \tag{20}$$

III.3. La tension aux bornes du moteur, qui est aussi celle aux bornes de R_r, est toujours U_m. La puissance reçue par R_r est donc :

$$\mathscr{P}_c = \frac{U_m^2}{R_r} \to R_r = \frac{U_m^2}{\mathscr{P}_c} = 2{,}0\,\Omega. \tag{21}$$

Des transformations Thévenin-Norton montrent que l'association $R_r//(E-R_E)$ est un générateur de force électromotrice $E_{eq} = ER_r/(R_E+R_r) = 20\,\mathrm{V}$ et de résistance interne $R_{eq} = R_E R_r/(R_E+R_r) = 6{,}7\cdot 10^{-1}\,\Omega$. Les calculs précédents assurent alors que la puissance reçue par le moteur sera :

$$\mathscr{P}_R = \frac{U_m(E_{eq}-U_m)}{R_{eq}} = 150\,\mathrm{W}. \tag{22}$$

On constate ici que la somme des puissances reçues par le moteur et le chauffage reste égale à la puissance reçue par le moteur seul précédemment. Il s'agit cependant d'un cas particulier. En particulier si la résistance R_r est suffisamment faible, la tension E_{eq} sera trop faible pour faire circuler un courant dans le moteur et la puissance qu'il recevra sera nulle. Par ailleurs le circuit se ramènera alors à un simple diviseur de courant et les résultats de la première partie assureront que la puissance reçue par R_r sera d'autant plus faible que R_r est faible. La puissance totale ne sera donc pas constante.

Correction de l'exercice 2

1. On note «–» une association série et «//» une association parallèle. Le dipôle AB est donc : R–$(R//(R+r))$, de résistance :

$$R_{\text{eq}} = R + \frac{(R+r)R}{2R+r}.$$

Pour avoir $R_{\text{eq}} = r$, r doit être solution de l'équation (après simplifications) :

$$3R^2 = r^2 \quad \text{soit : } r = \sqrt{3}R.$$

2. **(a)** Pour le cas à 0 cellules, le dipôle AB est $2R$–R_f, soit :

$R_f = R$ **:** $R_e = 3R$

$R_f = (\sqrt{3}-1)R$ **:** $\left(\sqrt{3}+1\right)R$.

(b) Pour le cas à 1 cellules, le dipôle AB est, comme dans la question précédente $2R$–$(R//(2R+R_f))$, soit :

$R_f = R$ **:**

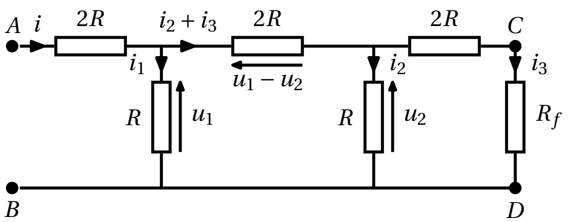
$$R_e = 2R + \frac{3R^2}{4R} = \frac{11R}{4}.$$

$R_f = (\sqrt{3}-1)R$ **:**

$$2R + \frac{R\left(2R+(\sqrt{3}-1)R\right)}{2R+(\sqrt{3}-1)R} = \frac{5+3\sqrt{3}}{\sqrt{3}+2} = \sqrt{3}+1 \quad \text{en multipliant par : } \frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}.$$

(c) Pour le cas à deux cellules, on utilise comme inconnues les intensités i, i_1, i_2 et i_3 et les tension u_1 et u_2 définies sur le schéma ci-contre. Les données sont les valeurs des résistances et la tension E. Les lois de Kirchhoff permettent d'établir le système :

$$\begin{cases} i &= i_1 + i_2 + i_3 \\ E &= u_1 + 2Ri \\ u_2 &= Ri_2 \\ u_2 &= \left(2R+R_f\right) i_3 \\ u_1 &= Ri_1 \\ u_1 - u_2 &= 2R\,(i_2+i_3). \end{cases}$$




```
from sympy import linsolve, pprint, symbols

i, i1, i2, i3, u1, u2 = symbols('i i1 i2 i3 u1 u2') #
Inconnues E, R, Rf = symbols('E R Rf') # Données systeme =
[i1 + i2 + i3 -i, u1 + 2*R*i -E, u2 - R *i2, u2 -(2*R +
Rf)*i3, u1 -R*i1, u1-u2 - 2*R*(i2+i3) ]

solution = linsolve(systeme,i, i1,i2,i3,u1,u2)
pprint(solution)
```

Code 1 : Résolution du système 6×6 à l'aide de la fonction `linsolve` du module `sympy`.

le code python ci-dessous, disponible à cette adresse (activité `0921-112055` sur `CAPYTALE`), permet de calculer que :

$$i = \frac{E}{R}\frac{11R+4R_f}{30R+11R_f}.$$

$R_f = 0$ **:** on calcule $R_e = E/i = 30R/11$.

$R_f = (\sqrt{3}-1)R$ **:** on calcule

$$R_e = \frac{E}{i} = R\frac{19+11\sqrt{3}}{7+4\sqrt{3}} = \left(\sqrt{3}+1\right)R.$$

3. Les trois cas précédents laissent supposer que l'utilisation de $R_f = \left(\sqrt{3}-1\right)R$ donnera une résistance totale égale à $R_e = \left(\sqrt{3}+1\right)R$. On établit cette propriété par récurrence sur N le nombre de cellules.

initialisation : Elle a déjà été établie pour $N = 0$.

propagation : Supposons qu'elle a été étable au rang N et notons $R_N = R_e$ la valeur de la résistance équivalente pour le système à N cellules.

Le système à $N+1$ cellules se construit selon : $2R$–$(R//(R_N))$. Or $R_e = \left(\sqrt{3}+1\right)R = R_f + 2R$. On peut donc le décrire comme : $2R$–$(R//(2R+R_f))$

On reconnaît alors le calcul déjà effectué pour le cas $N = 1$ qui donnait une résistance équivalente de $\left(\sqrt{3}+1\right)R = R_e$. La propriété est donc établie au rang $N+1$.

Ceci achève la récurrence : l'utilisation de $R_f = \left(\sqrt{3}-1\right)R$ permet d'obtenir une résistance équivalente $R_e = \left(\sqrt{3}+1\right)R$, constante quelle que soit le nombre de cellules dans la chaîne de résistances.